

Zad 1 Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną zbiorów z Ω , przeliczalnych lub mających przeliczalne dopełnienie. Wykaż, że $\mathcal{F}$ jest σ -ciałem na Ω .

Zad 2 Niech $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ będzie rodziną σ -ciał na Ω , a T dowolnym zbiorem indeksów. Wykaż, że $\bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$ jest σ -ciałem na Ω .

Zad 3 Niech $\mathcal{F}$ będzie σ -ciałem na Ω , a B dowolnym niepustym podzbiorem Ω . Wykaż, że $\mathcal{F}_B = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ jest σ -ciałem na B . Czy $\mathcal{F}_B$ jest σ -ciałem na Ω ?

Zad 4 Pokazać, że każde nieskończone σ -ciało jest nieprzeliczone.

Zad 5 Niech $A \cup B \cup C = \Omega$, $P(B) = 2P(A)$, $P(C) = 3P(A)$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C)$. Pokazać, że $\frac{1}{6} \leq P(A) \leq \frac{1}{4}$. Udowodnić, że oba ograniczenia są osiągalne.

Zad 6 W szafie jest $n > 6$ różnych par butów ($2n$ butów). Wybieramy z nich $2r \geq 6$ ($2r < n$) butów. Znaleźć prawdopodobieństwo, że wśród nich znajdują się dokładnie 3 pary.

Zad 7 Rzucono 7 kości do gry. Znaleźć prawdopodobieństwo, że przynajmniej na 4 kościach odsłonią się takie same ścianki.

Zad 8 Znaleźć prawdopodobieństwo, że przy 10 rzutach kostką otrzymamy serię co najmniej 5 takich samych wyników z rzędu.

Zad 9 Losujemy ciąg $(x_1, \dots, x_n)$ który jest permutacją zbioru $\{1, \dots, n\}$. Niech zdarzenie A_k oznacza że na k -tym miejscu padł rekord, czyli $x_k > \max\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$. Pokazać że dla dowolnych $l > k$ zdarzenia A_l i A_k są niezależne.

Zad 10 Rozdano losowo $n + 3$ paczków n osobom. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszyscy dostali co najmniej 1 paczka? Zadanie rozwiązać w dwóch modelach: rozróżnialnych i nierozróżnialnych paczków.

Zad 11 Z przedziału $(0; 1)$ losujemy 2 liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo że iloraz mniejszej z nich przez większą jest większy od odległości pomiędzy nimi.

Zad 12 Niech a i b będą losowymi liczbami z przedziału $(-1; 1)$. Oblicz prawdopodobieństwo, że funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + b$ ma dokładnie 3 pierwiastki rzeczywiste.

Zad 13 Odcinek o długości d dzielimy losowo na trzy części. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych części można zbudować trójkąt

Zad 14 Test medyczny wykrywa zachorowanie z prawdopodobieństwem 90%, ale też u zdrowych wskazuje on (błędnie) na chorobę w 0.5% przypadków. Faktyczny udział chorych w populacji wynosi 0.08%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że badana osoba jest faktycznie zdrowa, choć test medyczny wskazuje, że jest ona chora?

Zad 15 Do poszukiwania zaginionego rozbitka przydzielono 20 helikopterów. Każdy z nich można skierować do jednego z dwóch rejonów, w którym może, odpowiednio z prawdopodobieństwami $1/3$ i $1/6$, znajdować się rozbitki (z prawdopodobieństwem $1/2$ rozbitka nie ma w żadnym z tych rejonów). Każdy helikopter wykrywa znajdującego się w danym rejonie rozbitka z tym samym prawdopodobieństwem $p = 1 - \sqrt[10]{0.5}$ i niezależnie od innych helikopterów. Jak należy rozdzielić helikoptery między rejonami, aby prawdopodobieństwo odnalezienia rozbitka było maksymalne?

Zad 16 Wśród 65 monet jedna jest z dwoma orłami. Na wybranej losowo monecie wypadł orzeł n razy pod rząd. Ile musi wynosić n , aby stwierdzić, że na 80% wylosowaliśmy monetę z dwoma orłami.

Zad 17 Pijak znajduje się 3 kroki od przepaści. Prawdopodobieństwo wykonania kroku w kierunku przepaści wynosi $\frac{1}{3}$ a w przeciwnym kierunku $\frac{2}{3}$. Każdy krok wykonywany jest niezależnie od poprzednich kroków. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pijak nigdy nie spadnie w przepaść.

Zad 18 Udowodnij, że:

- a) jeśli zdarzenia A i B są niezależne, to pary A' i B' , A i B' , A' i B też są niezależne.
b) $P(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n P(A_n) \leq \limsup_n P(A_n) \leq P(\limsup_n A_n)$

Zad 19 Pokazać niezależność wyników rzutów monetą w modelu $((0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ z rozwinięciami dwójkowymi (rozwiązanie w Jakubowskim Sztencle).

Zad 20 Niech $A_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}\right], & \text{dla } n = 1, 3, 5, \dots \\ \left(\frac{1}{n+1}, \frac{2}{3} - \frac{1}{n+1}\right), & \text{dla } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$. Wyznacz $\liminf_n A_n$ i $\limsup_n A_n$.

Zad 21 Niech A_n będzie kwadratem $[-1,1]^2$ obróconym o kąt $\frac{n\pi}{6}$ względem środka. Wyznacz $\liminf_n A_n$ i $\limsup_n A_n$ (rysunki).

Zad 22 Mamy nieskończenie wiele ponumerowanych urn, przy czym w n -tej urnie jest $n + 3$ ponumerowanych kul o numerach $1, 2, \dots, n + 3$. Niech zdarzenie A_n oznacza, że wylosowane 2 kule z n -tej urny mają sąsiednie numery, natomiast zdarzenie B_n oznacza, że wylosowane 2 kule z n -tej urny mają numery odległe o co najmniej n . Jakie jest prawdopodobieństwo że zaszło nieskończenie wiele zdarzeń spośród $A_1, A_2, \dots$. Jakie jest prawdopodobieństwo że zaszło nieskończenie wiele zdarzeń spośród $B_1, B_2, \dots$

Zad 23 Mamy nieskończenie wiele ponumerowanych urn, przy czym w n -tej urnie jest $2n$ ponumerowanych kul o numerach $1, 2, \dots, 2n$. Niech zdarzenie A_n oznacza, że wylosowane 2 kule z n -tej urny mają numery odległe o n , natomiast zdarzenie B_n oznacza, że zaszło zdarzenie A_n i nie zaszło zdarzenie A_{n+1} . Jakie jest prawdopodobieństwo że zaszło nieskończenie wiele zdarzeń spośród $A_1, A_2, \dots$. Jakie jest prawdopodobieństwo że zaszło nieskończenie wiele zdarzeń spośród $B_1, B_2, \dots$

Zad 24* W nieskończonym ciągu prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p \in (0,1)$ zdarzenie A_n polega na tym, że w próbach o numerach $2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1$ zajdzie gdzieś kolejno n sukcesów (z rzędu). Obliczyć prawdopodobieństwo, że zajdzie skończenie wiele zdarzeń spośród $A_1, A_2, \dots$.

Wskazówka: dla $p < 1/2$ oszacować A_n z góry tak aby $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ była skończona, a dla $p \geq 1/2$ oszacować A_n z dołu tak aby $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ była nieskończona.

Zad 25 Niech $A_1, A_2, \dots$ będą niezależnymi zdarzeniami, gdzie $P(A_n) \in (0,1)$. Niech B oznacza zdarzenie, że zaszło co najmniej jedno zdarzenie spośród $A_1, A_2, \dots$, a C oznacza zdarzenie, że zaszło nieskończenie wiele zdarzeń spośród $A_1, A_2, \dots$. Wykazać, że $P(B) = 1 \Leftrightarrow P(C) = 1$.

Zad 26 Udowodnić, że dystrybuenta może mieć co najwyżej przeliczalnie wiele punktów nieciągłości.

Zad 27 Punkt materialny M porusza się ze stałą prędkością kątową po okręgu o promieniu 1. Znaleźć dystrybuentę i gęstość odległości punktu M od punktu $(1,0)$ (rysunki).

Zad 28 Przez punkt $(0,2)$ poprowadzono prostą w losowo wybranym kierunku. Znaleźć dystrybuentę i gęstość odciętej punktu przecięcia tej prostej z osią OX (rysunki).

Zad 29 Na odcinku $(0,1)$ losujemy punkt zgodnie z rozkładem o gęstości $f(x) = 2x \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$ dzieląc ten odcinek na dwa pododcinki o długościach różnych z prawdopodobieństwem 1. Obliczyć dystrybuentę i gęstość stosunku długości krótszego odcinka do dłuższego (rysunki).

Zad 30 Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy zadany gęstością: $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

Znaleźć dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej $Y = \max\{X^2, 2 - X\}$.

Zad 31 Zmienna losowa X ma rozkład podwójny wykładniczy zadany gęstością $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Znaleźć gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = e^{|X|}$.

Zad 32 Wykazać, że zmienna losowa $U = \frac{X}{X+Y}$ ma rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$, gdy X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym.

Zad 33 Pokazać, że jeżeli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym, to $Z = |X - Y|$ ma ten sam rozkład wykładniczy.

Zad 34 Niech (X, Y, Z) będzie losowym punktem o niezależnych współrzędnych mających ten sam rozkład normalny $N(0,1)$. Znaleźć gęstość rozkładu odległości tego punktu od środka układu współrzędnych (rysunek).

Zad 35 Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$. Znaleźć gęstości rozkładów $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ i $\max\{X_1, \dots, X_n\}$ (rysunki). Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\min\{X_1, \dots, X_n\} < \varepsilon)$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\max\{X_1, \dots, X_n\} > 1 - \varepsilon)$ dla dowolnego ustalonego $\varepsilon > 0$.

Zad 36 Dwuwymiarowy wektor losowy (X,Y) ma rozkład o funkcji gęstości $f(x,y) = x+2y$, dla $0 \leq x \leq 1$, $1-x \leq y \leq 1$. Znaleźć gęstości rozkładów zmiennych losowych X , Y , $\min\{X,Y\}$, $\max\{X,Y\}$ (rysunki).

Zad 37 Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkłady normalne $N(0, \sigma_X^2)$ i $N(0, \sigma_Y^2)$ odpowiednio. Znaleźć gęstość rozkładu zmiennej losowej $Z = \frac{Y}{X}$ (rysunek).

Zad 38 Wektor losowy (X,Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie o długości boku 1. Zmienna losowa Z jest odległością punktu (X,Y) od najbliższej krawędzi kwadratu. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję Z .

Zad 39 Niech zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy $\text{Exp}(\lambda)$ z funkcją gęstości $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ dla $x > 0$. Niech N będzie przybliżeniem X najbliższą liczbą całkowitą. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję N .

Zad 40 Rzucamy kostką (6 ścienną) tak długo aż wyrzucimy wszystkie oczka. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję liczby rzutów.

Zad 41 Gracz rzuca kostką do gry (6 ścienną) aż do momentu wyrzucenia szóstki i otrzymuje n^2 złotych, gdzie n oznacza liczbę rzutów. Ile powinna wynosić opłata za grę aby gra była sprawiedliwa? (wartość oczekiwana wygranej powinna być równa opłacie z grę)

Zad 42 Udowodnij że dla dowolnego ciągu zmiennych losowych $X_1, \dots, X_n$ o skończonej wariancji zachodzi nierówność

$$P\left(\max_{i=1, \dots, n} ||X_i| - E|X_i|| > \varepsilon\right) \leq \frac{n}{\varepsilon^2} \max_{i=1, \dots, n} V(X_i)$$

Zad 43 Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład jednostajny na kole o środku w punkcie $(1,1)$ i promieniu 1. Oblicz $\text{Cov}(X,Y)$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Zad 44 Dwuwymiarowa dyskretna zmienna losowa (X,Y) ma rozkład

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0	0,1	0,3
2	0,2	0,3	0,1

Niech $(U,V) = (|2X - Y|, Y - X)$. Wyznacz rozkład wektora (U,V) oraz oblicz $\text{Cov}(U,V)$.

Zad 45 Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie $0 \leq 1-x \leq y \leq 1$. Wyznaczyć rozkład wektora $(\min\{X,Y\}, \max\{X,Y\})$ oraz wyznaczyć $\text{Cov}(\min\{X,Y\}, \max\{X,Y\})$ nie korzystając z tego rozkładu.

Zad 46 Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależne o tym samym rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$. Wyznaczyć współczynnik korelacji $\rho(M,m)$, gdzie $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $m = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

Zad 47 Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależne o tej samej wariancji. Obliczyć współczynniki korelacji $\rho(U_n, V_n)$, $\rho(A_n, B_n)$, gdzie $A_n = aX_1 + X_2 + \dots + X_n$, $B_n = X_1 + \dots + X_{n-1} + bX_n$ oraz $U_n = X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n$, $V_n = nX_1 + (n-1)X_2 + \dots + X_n$. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(U_n, V_n)$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n, B_n)$.

Zad 48 Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $N(0,1)$. Wyznacz gęstość rozkładu $(X + aZ, Y + bZ)$ oraz oblicz współczynnik korelacji $\rho(X + aZ, Y + bZ)$. Narysuj wykresy współczynnika korelacji w zależności od a w dwóch przypadkach: $b = a$, $b = -a$.

Zad 49 Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależne o tym samym rozkładzie $N(m, \sigma^2)$. Znajdź najkrótszy przedział $[a, b]$ taki, że $P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \in [a, b]\right) = 95\%$.

Zad 50 Wektor (X,Y) ma rozkład zadany gęstością $f(x,y) = c e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + 2y^2)}$. Wyznaczyć współczynniki korelacji $\rho(X,Y)$ oraz $\rho(X - Y, X + Y)$.

Zad 51 Niech X, Y, Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $N(0,1)$. Oblicz gęstość zmiennej losowej $U = \arctg(2X + Y - 2Z)$

Zad 52 Wektor (X,Y) ma dwuwymiarowy rozkład $N(\mathbf{m}, \mathbf{V})$, $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$. Oblicz współczynnik korelacji $\rho(X^2, Y^2)$.

Wskazówka: Pokazać, że zmienne $X - Y, X + Y$ są niezależne i obliczyć $V((X - Y)^2 + (X + Y)^2)$

Zad 53 Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależne o tym samym rozkładzie jednostajnym na $[a, b]$. Udowodnij, że $\max\{X_1, \dots, X_n\} - \min\{X_1, \dots, X_n\}$ zbiega według prawdopodobieństwa do $b - a$.

Zad 54 Komputer dodaje 1200 liczb rzeczywistych z których każdą zaokrągla do najbliższej liczby całkowitej. Zakłada się, że błędy zaokrągleń są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $(-0.5, 0.5)$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że błąd w obliczeniu sumy nie przekroczy 10.

Zad 55 Podczas kontroli biletów autobusowych jedna osoba na sto nie ma ważnego biletu i płaci mandat w wysokości 100 zł. Ile osób należy skontrolować, aby z prawdopodobieństwem 90% zysk z mandatów wyniósł co najmniej 4000zł.

Zad 56 Rzucono 100 razy kostką do gry. Serię stu rzutów uznajemy za sukces jeżeli uzyskano w sumie przynajmniej 400 oczek. Ile przeciętnie serii rzutów należy wykonać aby uzyskać sukces.

Zad 57 Aby stwierdzić jak wielu wyborców popiera obecnie partię ABC losujemy próbkę i na niej przeprowadzamy badanie. Jak duża powinna być ta próbka aby uzyskany wynik różnił się od rzeczywistego poparcia dla partii ABC nie więcej niż o $b=3\%$ z prawdopodobieństwem $1-\alpha=0.95$. Jaki będzie wynik jeżeli przed losowaniem próbki mamy częściową informację, że poparcie dla ABC nie przekracza 20%?